Notas de Aula 3:

Derivadas Parciais

FEP0259 - Termodinâmica II (2010)

Carmen P. C. Prado

Uma função pode depender de uma variável, por exemplo $f(x) = 3x + 2$, ou de muitas variáveis, por exemplo $f(x, y) = x^2 + y^2 + xy$. Para funções de uma variável definimos sua derivada como:

$$f'(x) = \frac{df}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

e dizemos que uma variação infinitesimal da função $f(x)$ é dada por $df = f'(x)\, dx$.

Podemos estender o conceito de derivada para funções de várias variáveis. As definições rigorosas você verá em seu curso de cálculo, mas as idéias gerais são bem simples. Iremos usar esses conceitos no curso de Termodinâmica II, portanto vale uma revisão, que servirá como uma introdução informal para quem ainda não estudou cálculo diferencial e integral de funções de mais de uma variável e nunca ouviu falar em *derivadas parciais*.

Uma função de mais de uma variável é representada por uma (hiper)superfície. Por exemplo, $z = f(x, y) = x^2 + y^2 + xy$ pode ser representada por:

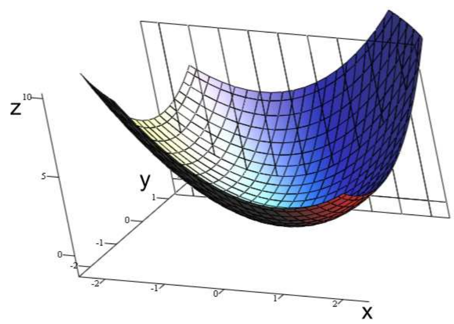

Figura 1: $f(x, y) = z = x^2 + y^2 + xy$

A derivada parcial de uma função de várias variáveis é a sua derivada com respeito a uma dessas variáveis, quando as outras variáveis são mantidas constantes. Para representar uma derivada parcial, em vez de $f'(x)$ ou d/dx, escrevemos f'_x, $\partial/\partial x$, ∂_x. Mais especificamente definimos:

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x}$$

Exemplos:

(a) $f(x, y) = x^2 + y^2 + xy$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} &= 2x + y; \\
\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} &= 2y + x
\end{aligned}$$

(b) $f(x, y, z) = 3x^3\, y^2\, z^{1/2}$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f(x,y,z)}{\partial x} &= 9x^2\, y^2\, z^{1/2}; \\
\frac{\partial f(x,y,z)}{\partial y} &= 6x^3\, y\, z^{1/2}; \\
\frac{\partial f(x,y,z)}{\partial z} &= \frac{3}{2}x^3\, y^2\, z^{-1/2}
\end{aligned}$$

(c) $f(x, y) = x\, \cos(x^2 + y^2)$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} &= \cos(x^2 + y^2) + 2x^2\, \sin(x^2 + y^2); \\
\frac{\partial f(x,y)}{\partial y} &= 2\, x\, y \sin(x^2 + y^2).
\end{aligned}$$

Voltando ao gráfico da figura 1, poemos perguntar qual a inclinação da reta que passa por um certo ponto da superfície, ou seja, qual a “derivada” da função $f(x, y)$ nesse ponto. Essa pergunta é impossível de ser respondida pois por cada ponto da superfície passam infinitas retas tangentes, cada uma em uma direção. A derivada parcial nada mais é que a inclinação da tangente em uma direção específica. Duas direções que costumas ser importantes são as direções paralelas aos planos xz e yz, ou seja, as direções x e y. Mas podemos escolher qualquer uma, por exemplo a direção de máxima variação da função naquele ponto. Por exemplo, se cortarmos o gráfico da figura 1 com o plano $y = 1$ obtemos a curva $f(x, 1) = x^2 + x + 1$, cujo gráfico é dado pela figura 2.

A derivada parcial de $f(x, y)$ na direção x, no ponto $(x, y) = (1, 1)$ é a inclinação da tangente à curva nesse ponto.

Um exemplo de aplicação sempre citado é o do volume de um cone, que depende da altura e do raio da base de acordo com a fórmula:

$$V(r, h) = \frac{\pi r^2 h}{3}.$$

A derivada parcial de V com relação à r é:

$$\frac{\partial V}{\partial r} = \frac{2\pi r h}{3},$$

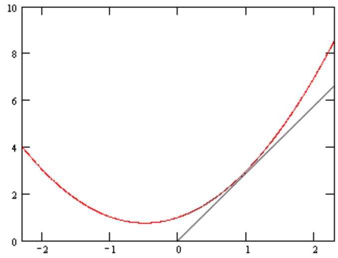

Figura 2: Curva resultante da intersecção da função $f(x, y) = x^2 + y^2 + xy$ com o plano $y = 1$. A curva que representa essa intersecção é dada por $f(x, 1) = x^2 + x + 1$.

que representa a taxa de variação do volume com o raio *se a altura for mandida constante*. A derivada parcial com relação à altura h é:

$$\frac{\partial V}{\partial h} = \frac{\pi r^2}{3},$$

Que representa a taxa de variação do volume com a altura *se o raio for mandido constante*.

Note que as **derivadas totais** de V com relação à r e h são, respectivamente,

$$\frac{\mathrm{d}\,V}{\mathrm{d}\,r} = \overbrace{\frac{2\pi rh}{3}}^{\frac{\partial V}{\partial r}} + \overbrace{\frac{\pi r^2}{3}}^{\frac{\partial V}{\partial h}} \frac{\mathrm{d}\,h}{\mathrm{d}\,r}$$

e

$$\frac{\mathrm{d}\,V}{\mathrm{d}\,h} = \overbrace{\frac{\pi r^2}{3}}^{\frac{\partial V}{\partial h}} + \overbrace{\frac{2\pi rh}{3}}^{\frac{\partial V}{\partial r}} \frac{\mathrm{d}\,r}{\mathrm{d}\,h}$$

A diferença entre a derivada total e a derivada parcial é a eliminação da dependência indireta entre as variáveis (no caso da derivada parcial). Se, por alguma razão arbitrária, a proporção do cone devem ser mantida constante, de forma que $h/r = k$ (k = constante),

$$k = \frac{h}{r} = \frac{\mathrm{d}\,h}{\mathrm{d}\,r}.$$

Isto dá para a derivada total com relação à r:

$$\frac{\mathrm{d}\,V}{\mathrm{d}\,r} = \frac{2\pi rh}{3} + k\frac{\pi r^2}{3}$$

Podemos escrever, de forma análoga ao que é feito para funções de uma variável,

$$df = \frac{\partial f(x,y)}{\partial x}dx + \frac{\partial f(x,y)}{\partial y}dy$$

No caso do cone, podemos escrever:

$$\mathrm{d}\,V = \frac{\partial V}{\partial h}\,dh + \frac{\partial V}{\partial r}\,dr = \frac{\pi r^2}{3}\,dh + \frac{2\pi r h}{3}\,dr,$$

que nos dá a variação total de V quando tanto h como r variam de forma independente (ou seja, sem manter a proporção do cone constante.

Segundas derivadas

Podemos também calcular segundas derivadas parciais. Mas com funções de mais de uma variável, além da segunda derivada parcial com relação a x, y, etc., podemos calcular segundas derivadas mistas. por exemplo, se $f = f(x, y)$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\right) \quad \text{ou} \quad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\right).$$

pode-se mostrar que, na maioria dos casos,

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x}.$$

Notação particular da termodinâmica

Note que as variáveis x, y podem ser omitidas nessa expressão, para simplificar a notação se não tivermos nenhuma dúvida sobre quais são as variáveis em função das quais estamos escrevendo f. Na física, em particular na termodinâmica, uma grandeza como por exemplo a entropia, pode ser expressa em função de diferentes variáveis. Como a entropia é uma *função de estado*, ela é completamente caracterizada pelas variáveis que definem um determinado equilíbrio, por exemplo P, V e T. Mas como P, V e T estão relacionadas pela *equação de estado* (PV = NRT para gases ideais), basta um par delas para definir o equilíbrio. Podemos expressar S portanto como função de qualquer um dos pares P-V, P-T ou V-T, ou seja, $S = S(P, V)$ ou $S = S(P, T)$ ou ainda $S = S(V, T)$[1]. Para deixar bem claro qual variável está sendo mantida constante durante a derivação (parcial), desenvolveu-se a notação:

$$\left(\frac{\partial S}{\partial T}\right)_V$$

que quer dizer que temos a derivada parcial de S (escrita em função de V e T) com relação a T, **mantido V constante**.

As figuras e parte do texto foram extraídos do sítio da wikipedia (http://en.wikipedia.org/wiki/Partial_derivative), acessado em 20 de março de 1020.

[1]Isso você viu em sue curso de termodinâmica I !